I. Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple et <u>Définition</u> :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

<u>Définitions</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f '.

2) <u>Formules de dérivation des fonctions usuelles :</u>

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f '	Ensemble de définition de f '
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

<u>Exemples</u> : voir exercices

<u>Démonstration au programme pour la fonction inverse :</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right)=-\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

II. Opérations sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	
ku est dérivable sur I, où k est une constante	
uv est dérivable sur I	
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	

<u>Démonstration au programme pour le produit :</u>

- On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$=\frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}$$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\,v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on a :

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

Car u et v sont dérivables sur I.

Et, $\lim\limits_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$.

Soit, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$

Ainsi : $(uv)'=u'v+uv'$

III.Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax+b)$	f dérivable sur I	$af'(ax+b)$

<u>Exemple</u> : $f(x) = \sqrt{5x-4}$

Alors $f'(x) = 5\dfrac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}$

En effet : $(5x-4)' = 5$ et $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

IV. Cas de la fonction valeur absolue

<u>Définition</u> : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.
La valeur absolue de A se note $|A|$.

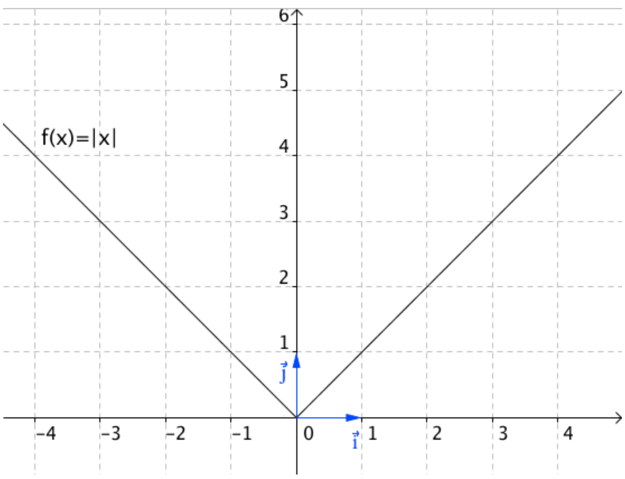
$$|x| = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Tableau de variation et représentation graphique de $|x|$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	↘	0	↗

<u>Remarque</u> :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



3) <u>Étude de la dérivabilité en 0 :</u>

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = |x|$.
On calcule le taux de variation de f en 0 :

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.
En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.